$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/_{n}\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

$f = \underbrace{t^2}_{\geq 0} + 1 \in \mathbb{R}[t]$ hat keine Nullstelle

$f = t^2 + 1 \in \mathbb{C}[t]$ hat Nullstellen
$= (t-i)(t+i)$ i und $-i$
$(i^2 = -1)$

Beweis:

$(\Leftarrow)$ $f = (t-\lambda)\cdot q$

$ausw_\lambda(f) = ausw_\lambda((t-\lambda)\cdot q)$
$= \underbrace{ausw_\lambda(t-\lambda)}_{0} \cdot ausw_\lambda(q)$

$(\Rightarrow)$ Division mit Rest:

$f = \overbrace{(t-\lambda)}^{\text{deg } 1}\cdot q + r$

Leitkoeffizient $1 \in R^*$ ✓

$\deg(r) < 1$, also $r = b_0 \in R$

Auswertung an λ:

$\hat{f}(\lambda) = 0 \cdot \hat{q}(\lambda) + \hat{r}(\lambda)$

$$\underset{0}{\uparrow} \qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{0} \qquad \underset{b_0}{\uparrow}$$

Also $r = 0 \in R[t]$. $\square$

$f = t^2 + 1 \in \mathbb{C}[t]$, $\quad i, -i$

<u>Beweis</u>: Induktion über $\deg(f)$.

IA: $\deg(f) = 0$ heißt $f = a_0$, $a_0 \in K^*$

$\forall \lambda \in K: \hat{f}(\lambda) = a_0 \neq 0$

IS: **Nehme an, Korollar gilt für Polynome von Grad $< n$.**

Sei $\deg(f) = n$, $\hat{f}(\lambda) = 0$.

Nach Satz:

$$f = (t - \lambda) \cdot q$$

Jede NS $\lambda' \neq \lambda$ von f ist auch NS von q:

$$0 = \underbrace{(\lambda' - \lambda)} \cdot \hat{q}(\lambda') \quad \Big| \cdot (\lambda' - \lambda)^{-1}$$

$$K^*$$

$$0 = \tilde{q}(\lambda')$$

Also ist

$$\text{Anzahl NS von } f \leq \underbrace{(\text{Anzahl NS von } q)}_{\leq\; n-1} + 1$$

$$\leq n - 1 + 1$$

$$\leq n$$

$\square$

$$f = (t-3)\cdot(t-3) \in \mathbb{R}[t]$$

$$= (t-3)^2$$

λ NS von $f \iff \mu(f;\lambda) > 0$

z.B. $\underbrace{(t-i)(t+i)}\cdot(t-1)^3(t+2) \in \mathbb{C}[t]$

$$f = \underbrace{(t^2+1)}_{g}\cdot(t-1)^3\cdot(t+2) \in \mathbb{R}[t]$$

$$f = \underbrace{\frac{17}{23}}_{g}\cdot(t-1)^3\cdot(t+2) \in \mathbb{R}[t]$$

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ Unterkörper

$\mathbb{R}[t] \subset \mathbb{C}[t]$ Unterring

Lemma 1: $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

$$g := (t-\lambda)\cdot(t-\bar{\lambda}) \in \mathbb{R}[t]$$

und g hat keine reellen Nullstellen.

Beweis:

$$g = t^2 - \underbrace{(\lambda + \bar{\lambda})}_{\in \mathbb{R}} t + \underbrace{\lambda \bar{\lambda}}_{\mathbb{R}}$$

r.z.z.: $\forall \lambda \in \mathbb{C}$:

(Für $\lambda = a + ib$ ist $(a, b \in \mathbb{R})$

$$\lambda + \bar{\lambda} = 2 \cdot a \in \mathbb{R}$$

$$(= 2\, \mathrm{re}(\lambda))$$

$$\lambda \bar{\lambda} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2 = |\lambda|^2 \in \mathbb{R} \;)$$

$\lambda \neq \bar{\lambda}$ und $\deg(g) = 2$, also kann

g keine weitere Nullstelle in $\mathbb{C}$ haben (also erst recht nicht in $\mathbb{R}$).

$\square$

Lemma 2: (2.3.12)

$f \in \mathbb{R}[t]$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ NS von f.

Dann $f = \underbrace{(t-\lambda)(t-\bar{\lambda})}_{\mathbb{R}[t]} \cdot \underbrace{g}_{\in \mathbb{R}[t]}$

mit

Beweis: $g := (t-\lambda)(t-\bar{\lambda})$ nach Lemma 1.

Division mit Rest in $\mathbb{R}[t]$:

$\boxed{f = g \cdot q + r}$ mit $\deg(r) \leq 1$.

Werte aus an λ und $\bar{\lambda}$:

$\underbrace{\tilde{f}(\lambda) = r(\lambda)}_{0 = r(\lambda)}$ und $\underbrace{\tilde{f}(\bar{\lambda}) = r(\bar{\lambda})}$

$f = \sum a_i t^i$, $a_i \in \mathbb{R}$

$\tilde{f}(\lambda) = \sum a_i \lambda^i = 0$ u. V.

$$\tilde{f}(\bar{\lambda}) = \sum a_i (\bar{\lambda})^i$$
$$= \sum \bar{a}_i (\bar{\lambda})^i \quad \text{denn } a_i \in \mathbb{R}$$
$$= \overline{\sum a_i \lambda^i} \quad (\text{denn } \bar{\ } : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \text{ Ringhomomorph.})$$
$$= \bar{0}$$
$$= 0.$$

$r(\lambda) = 0$ und $r(\bar{\lambda}) = 0$,

$\lambda \neq \bar{\lambda}$ (1) (2) $\deg(r) \leq 1$

Also $r = 0$. $\square$

<u>Lemma 3</u> (2.3.12):

$f \in \mathbb{R}[t]$, $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\mu(f;\lambda) = \mu(f;\bar{\lambda})$$

<u>Beweis</u>:

$\lambda \in \mathbb{R}$: ✓ $(\bar{\lambda} = \lambda)$

$\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$: $f = (t-\lambda)(t-\bar{\lambda}) \cdot q$

mit $q \in \mathbb{R}[t]$.

Führe Induktion über

Grad(f). $\square$

Beweis des Struktursatzes:

$$f = a \cdot (t-\lambda_1)^{r_1} \cdot \ldots \cdot (t-\lambda_\ell)^{r_\ell} \in \mathbb{C}[t]$$

($\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell$ verschiedenen NS von f) $(a \in \mathbb{C})$

Nach Lemma 3:

Zu jeder NS $\lambda_i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$
gehört NS $\lambda_j = \overline{\lambda_i} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$
und $r_i = r_j$ (mit $i \neq j$)

Fasse jeweils zusammen

$$g_i := (t-\lambda_i)(t-\overline{\lambda_i}) \in \mathbb{R}[t]$$

Lemma 1

$$g_i^{r_i} = (t-\lambda_i)^{r_i}(t-\overline{\lambda_i})^{r_i}$$

Nach Umnummerierung erhalten wir angegebene Form von f.

Ferner $a =$ Leitkoeffizient von f, also $a \in \mathbb{R}$. $\square$

$a, b, c, d, \ldots \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$

$f = a$ keine NS

$f = at + b$ hat NS $\lambda_1 = -\frac{b}{a}$

$f = at^2 + bt + c$ hat NS

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

falls $b^2 - 4ac \geq 0$,

sonst keine NS.

($a = 1$: „p-q-Formel")

$f = at^3 + bt^2 + ct + d$

$f = at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e$

$\Big\}$ komplizierte Formeln

$f = at^5 + \ldots$ – i. A. unmöglich